О ПЕРЕНОСЕ МАССИВНЫХ ЧАСТИЦ АТМОСФЕРНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

Л.Х. Ингель lev.ingel@gmail.com

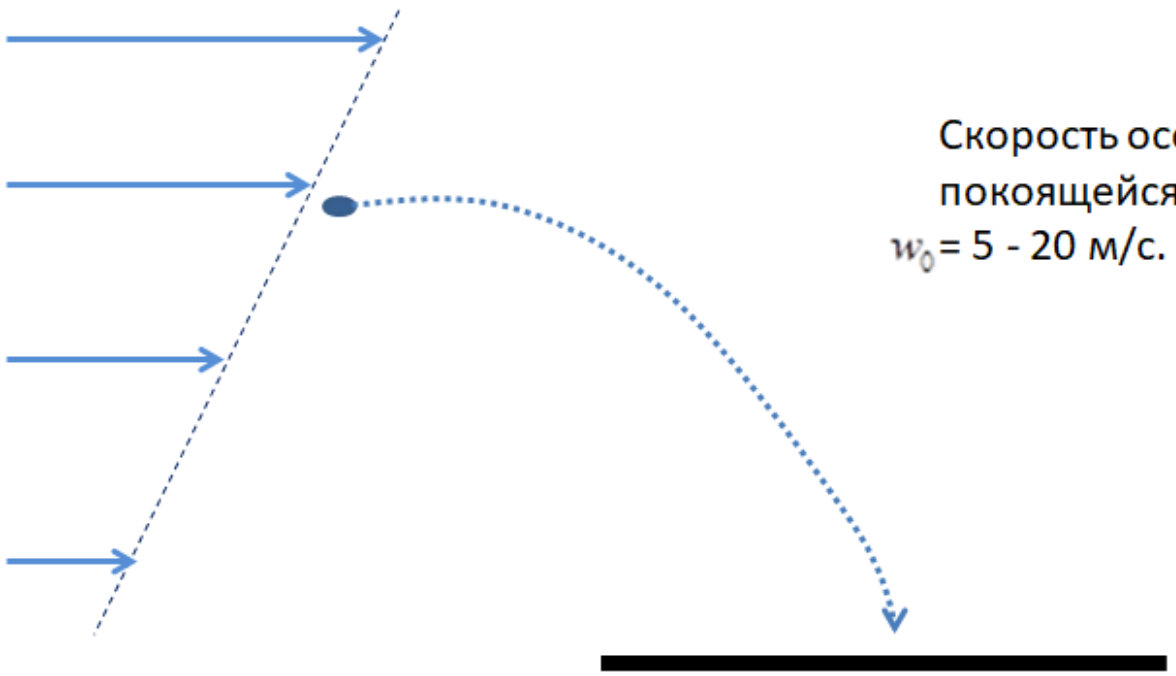
НПО "Тайфун", Россия, Обнинск
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва

Аннотация. Теоретически исследуется перенос инерционных частиц (прежде всего, достаточно массивных гидрометеоров) атмосферными течениями. Рассматривается частицы со скоростями оседания порядка 5-20 м/с и используется нелинейная модель с квадратичной зависимостью сопротивления от скорости. Коэффициент сопротивления в этой модели пропорционален модулю вектора скорости частицы относительно среды. Поэтому разные составляющие движения, вносящие вклад в модуль скорости, влияют друг на друга, что дополнительно осложняет расчет переноса оседающих частиц горизонтальным течением. Решение задачи о динамике движения и дальности горизонтального переноса частиц в большой степени определяется соотношением высоты источника (исходной точки) и пространственного масштаба, равного отношению квадрата скорости стационарного оседания частицы в покоящейся среде к ускорению силы тяжести. Для случая больш***и***х значений упомянутого соотношения предложен эффективный подход, позволяющий получать простые приближенные аналитические решения для дальности горизонтального переноса частиц. Приведены конкретные примеры расчетов для распространенных моделей атмосферных течений.

***Ключевые слова*:** массивные частицы, перенос в атмосфере, гидрометеоры, выпадение, атмосферные течения, теория, нелинейная динамика

В настоящем докладе рассматривается перенос в атмосфере достаточно массивных частиц (прежде всего, гидрометеоров) при больших значениях чисел Рейнольдса Re для частицы, когда, в известном приближении, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости частицы относительно среды. Согласно, например, [Волощук, 1971], такая модель закона сопротивления применима при $10^3 < \mathrm{Re} < 3 \cdot 10^5$. Нижняя граница этого интервала отвечает оседанию капель воды размерами порядка 1 мм. Коэффициент сопротивления в этой модели пропорционален модулю вектора скорости частицы относительно среды. Поэтому разные составляющие движения, вносящие вклад в модуль скорости, влияют друг на друга, что дополнительно осложняет расчет переноса оседающих частиц горизонтальным течением.¶

→ Одно из возможных приложений связано с тем, что горизонтальный перенос интенсивных осадков сдвиговыми течениями весьма важен для динамики некоторых опасных конвективных явлений.¶



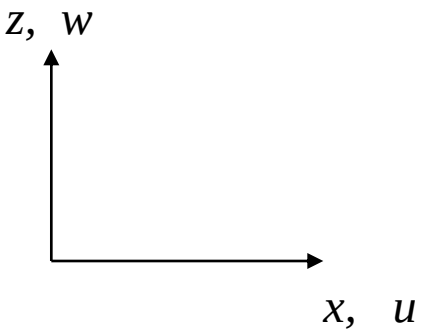
Re>1000

Скорость оседания в покоящейся среде

w_0 = 5 - 20 м/с.

Система уравнений движения частицы при квадратичном сопротивлении

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -c(\mathbf{v} - \mathbf{V}), \qquad c = \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{V}|}{l}$$



$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\left((u-U)^2 + (w-W)^2\right)^{1/2}}{l}(u-U), \\ \dfrac{dw}{dt} = -g - \dfrac{\left((u-U)^2 + (w-W)^2\right)^{1/2}}{l}(w-W). \end{cases}$$

w_0 – модуль скорости стационарного оседания частицы в покоящейся среде

Эта величина предполагается известной.

$$l = \frac{w_0^2}{g}$$

Заглавными буквами обозначены составляющие скорости среды, строчными - составляющие скорости частицы.

g – ускорение силы тяжести.

→ В начальный момент $t = 0$ частица находится на высоте $z = h$ и оседает со скоростью $w = -w_0$.¶

Рассматриваем движение достаточно массивных частиц со скоростями оседания порядка 5-20 м/с, а вертикальные движения среды предполагаются существенно более медленными. Это позволяет упростить систему уравнений:

$$\frac{du}{dt} \approx -\frac{\left((u-U)^2 + w^2\right)^{1/2}}{l}(u-U), \qquad \frac{dw}{dt} \approx -g - \frac{\left((u-U)^2 + w^2\right)^{1/2}}{l} w.$$

В качестве одной из искомых переменных в некоторых случаях удобно использовать $\upsilon \equiv u - U$ - разность горизонтальных скоростей частицы и среды. Также, от времени удобно перейти к переменной z. В новых переменных система сводится к виду:

$$\frac{d\upsilon}{dz} \approx -\frac{\left(\upsilon^2 + w^2\right)^{1/2}}{lw}\upsilon - \frac{dU}{dz}, \qquad w\frac{dw}{dz} \approx -g - \frac{\left(\upsilon^2 + w^2\right)^{1/2}}{l} w.$$

→ Перейдем к безразмерным переменным ξ, ψ, Z, нормируя составляющие скорости частицы на скорость ее оседания в покоящейся среде w_0, а вертикальную координату на масштаб l:¶

$$u - U \equiv \upsilon = \xi w_0, \quad w = \psi w_0, \quad z = lZ = \frac{w_0^2}{g} Z.¶$$

Уравнения принимают вид¶

$$\frac{d\xi}{dZ} \approx -\frac{\xi\left(\psi^2 + \xi^2\right)^{1/2}}{\psi} - \frac{d(U/w_0)}{dZ}, \qquad \frac{d\psi}{dZ} \approx -\frac{1}{\psi} - \left(\psi^2 + \xi^2\right)^{1/2}.¶$$

Имеет смысл, прежде всего, проанализировать простейший случай, когда оседающая частица из покоящейся среды попадает в область быстрого сносящего горизонтального течения — исследовать реакцию движения частицы на резкое изменение с высотой скорости горизонтального течения. Пусть частица оседает в покоящейся среде до некоторого уровня $z = h$, на котором скорость течения скачкообразно меняется от нуля до $U_* = \text{const}$. Для области $z < h$, в этом случае, очевидно, следует решать систему уравнений без последнего слагаемого в первом уравнении (оно равно нулю при $U = \text{const}$) с условиями на верхней границе $z = h$: $\psi = -1$, $\xi = -a \equiv -U_*/w_0$, где параметр a, с точностью до знака – отношение скорости горизонтального течения к скорости оседания частицы в покоящейся среде.¶

Численное решение показывает, что адаптация движения даже достаточно массивных частиц, даже к самым резким изменениям горизонтальной скорости среды происходит очень быстро.

Пусть, например, скорость оседания частицы в покоящейся среде $w_0 = 10$ м/с (большие капли дождя с диаметром порядка 5 мм или мелкий град). Тогда пространственный масштаб $l \equiv w_0^2 / g$ составляет около 10 м и проходится частицей за время порядка $w_0 / g \sim 1$ с. В течение этого времени происходит адаптация движения: скорость оседания частицы на этот короткий период немного убывает вследствие увеличения силы сопротивления, связанного с резким появлением сносящего потока. По прошествии указанного периода частица увлекается этим потоком, наличие горизонтального течения перестает влиять на силу сопротивления, и восстанавливается скорость оседания частицы, характерная для движения в покоящейся среде. Таким образом, вариации скорости оседания, связанные с «включением» сносящего потока, оказываются незначительными и кратковременными, и в уравнениях можно принять $w \approx -w_0$, т.е. $\psi \approx -1$. Первое из уравнений при $U = \text{const}$ принимает вид

$$\frac{d\xi}{dZ} \approx \xi\left(1+\xi^2\right)^{1/2}$$

и интегрируется в явном аналитическом виде.

Приведем результат:

$$\xi \equiv \frac{u-U}{w_0} = \mathrm{sh}\left\{2\mathrm{Arth}\left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arsh}(\xi_0)\right)\exp\left(\frac{z-h}{l}\right)\right]\right\}$$

где $\xi_0 = -U_* / w_0$ – граничное условие для функции ξ на уровне $z = h$.

Этот приближенный результат хорошо согласуется с точным численным решением.

→ В менее идеализированных ситуациях, когда сносящее течение не включается резко, а меняется плавно, движение частицы, тем более, плавно адаптируется к фоновому потоку. Поэтому приближенно выполняются равенства $\xi = 0,\ \psi = -1$, т.е., $u \approx U(z),\ w \approx -w_0$. Это позволяет легко рассчитать перенос частиц и область их выпадения для разнообразных атмосферных течений. Если x, z – текущие координаты частицы, x_0, h – начальные координаты, то из предыдущего следует:¶

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt} = -w_0\frac{dx}{dz} \approx U(z); \qquad x \approx x_0 - \frac{1}{w_0}\int_h^z U(z')dz'$$

Если принять начальную горизонтальную координату частицы $x_0 = 0$, то место выпадения:

$$x_* \approx \frac{1}{w_0}\int_0^h U(z')dz'$$

Таким образом, несмотря на нелинейный характер динамики переноса инерционных частиц, выполненный анализ позволил обосновать простое приближенное соотношение для дальности переноса таких частиц сдвиговыми течениями.

КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕРЫ

Течение Куэтта. В качестве простейшего примера рассмотрим случай течения с однородным сдвигом (течение Куэтта): $U(z)=\Omega z$, где Ω – постоянный вертикальный градиент скорости горизонтального течения. Полученные выражения дают в этом случае траекторию частицы и дальность переноса¶

$$\cdots z = h\left(1-\frac{2w_0 x}{\Omega h^2}\right)^{1/2}, \cdots\cdots\cdots x_* \approx \frac{\Omega h^2}{2w_0}.\P$$

Результат сильнее всего зависит от высоты источника h. Если $\Omega = 0.03$ с$^{-1}$, $h = 10^3$ м, $w_0 = 10$ м/с, то дальность переноса $x_* = 1500$ м.¶

Перенос в экмановском пограничном слое. Если геострофический ветер u_g направлен вдоль одной из горизонтальных осей x, то решение для двух составляющих горизонтальной скорости течения имеет вид [Pedlosky, 1987]:

$$u = u_g\left[1 - \cos\left(\frac{z}{h_E}\right)\exp\left(-\frac{z}{h_E}\right)\right], \qquad \mathrm{v} = u_g \sin\left(\frac{z}{h_E}\right)\exp\left(-\frac{z}{h_E}\right),$$

где $h_E = (2K/f)^{1/2}$ – экмановский вертикальный масштаб, K – коэффициент кинематической вязкости, f – параметр Кориолиса, v – составляющая скорости течения вдоль второй горизонтальной оси y.

Для дальности переноса частицы нетрудно получить выражения:

$$x_* \approx \frac{u_g h_E}{2w_0}\left\{\frac{2h}{h_E} - 1 + \exp\left(-\frac{h}{h_E}\right)\left[\cos\left(\frac{h}{h_E}\right) - \sin\left(\frac{h}{h_E}\right)\right]\right\},$$

$$y_* \approx \frac{u_g h_E}{2w_0}\left\{1 - \exp\left(-\frac{h}{h_E}\right)\left[\cos\left(\frac{h}{h_E}\right) + \sin\left(\frac{h}{h_E}\right)\right]\right\}.$$

При прохождении через экмановский погранслой частица переносится по горизонтали на расстояние порядка $u_g h_E / w_0$. Если $u_g = 10$ м/с, $h_E = 300$ м, $w_0 = 10$ м/с, то дальность переноса порядка 300 м. Перенос вдоль оси x может быть значительно больше, если высота источника $h >> h_E$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретически исследован перенос сдвиговыми течениями инерционных частиц (прежде всего, достаточно массивных гидрометеоров). Несмотря на нелинейный закон сопротивления, удается обосновать достаточно простые закономерности переноса, в частности, аналитическое выражение для дальности переноса частиц. Приведены примеры расчетов для простейших типов атмосферных течений.

Более полное изложение материала содержится в статье:

Ingel L.Kh. Examples of analytical solutions to the problem of transfer of massive particles by atmospheric currents // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2026, Vol. 62. No. 6. P. 699–703. DOI: 10.1134/S0001433826701471

Русскоязычная версия этой статьи также выйдет в ближайшее время.